

## Ćwiczenie 9

---

### BADANIE RUCHU OBROTOWEGO

#### 9.1. WSTĘP

Celem ćwiczenia jest doświadczalne wyznaczenie momentów bezwładności brył obrotowych. Zakres materiału teoretycznego niezbędny do zrozumienia ćwiczenia obejmuje: analityczne wyznaczanie masowych momentów bezwładności brył obrotowych względem osi, kinematykę i dynamikę bryły sztywnej w ruchu obrotowym. W ćwiczeniu wyznaczone zostaną doświadczalnie momenty bezwładności wybranych brył obrotowych.

#### 9.2. WPROWADZENIE TEORETYCZNE

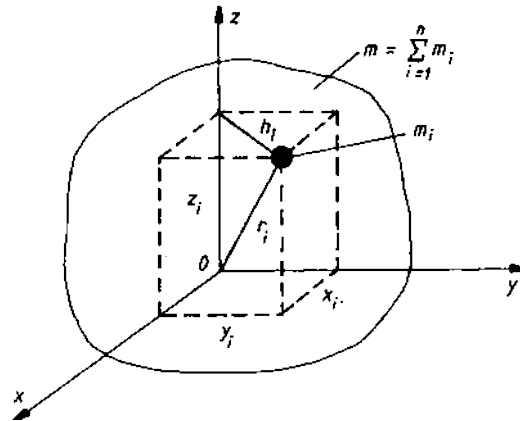
*Momentem bezwładności ciała materialnego względem dowolnie obranej osi nazywamy granicę, do której dąży suma iloczynów mas elementów, na które podzieliliśmy ciało, przez kwadraty odległości tych elementów od wspomnianej osi, gdy liczba elementów dąży do nieskończoności przy jednoczesnym dążeniu do zera ich wymiarów. Aby przybliżyć powyższą definicję, weźmy dowolne ciało materialne o masie  $m$  przedstawione na rys. 1 i podzielmy na  $n$  elementów, z których jeden, dowolny o masie  $m_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) oznaczono na rysunku. Jeśli teraz dla przykładu za dowolną oś, względem której moment bezwładności określamy, przyjmiemy oś  $Oz$ , to według definicji moment bezwładności względem tej osi będzie równy:*

$$I_z = \lim \sum_{i=1}^n m_i h_i^2 \quad (1)$$

W analogiczny sposób można zdefiniować momenty bezwładności układu punktów materialnych względem punktu oraz względem płaszczyzny. Ponieważ wyrażenie (1) przy ilości mas  $m_i$  dążącej do nieskończoności w granicznym przypadku jest równe całce, to otrzymamy w przypadku równania (1):

$$I_z = \int_m h^2 dm = \int_v \rho h^2 dV \quad (2)$$

gdzie  $\rho$  – gęstość ciała,  $V$  – objętość.



Rys. 1. Opis położenia elementu o masie  $m$  dowolnej bryły

Ponieważ w ogólności  $h^2 = x^2 + y^2$ , to po podstawieniu do wzoru (2) otrzymamy:

$$I_z = \int_m (x^2 + y^2) dm = \int_v \rho (x^2 + y^2) dV \quad (3)$$

Można wykazać, że moment bezwładności ciała względem dowolnego punktu  $O$  jest równy sumie momentu względem środka masy  $C$  i iloczynu masy ciała przez kwadrat odległości danego punktu od środka masy. Zależność ta może być zapisana wzorem:

$$I_0 = I_c + mr_c^2 \quad (4)$$

Również moment bezwładności względem dowolnej płaszczyzny (prostej) jest równy sumie momentu bezwładności względem płaszczyzny (prostej) równoległej do danej i przechodzącej przez środek masy oraz iloczynu masy przez kwadrat odległości płaszczyzn (prostych).

W analizie dynamicznego zachowania się ciał sztywnych wprowadza się pojęcie *momentów odśrodkowych*, zwanych również momentami dewiacyjnymi lub momentami zboczenia. Z definicji momentem odśrodkowym ciała względem dwóch prostopadłych płaszczyzn nazywamy granicę sumy iloczynów mas elementów ciała przez odległość tych elementów od danych płaszczyzn. Można więc przykładowy moment odśrodkowy względem np. płaszczyzn  $XY$  i  $YZ$  prostokątnego układu współrzędnych określić wzorem:

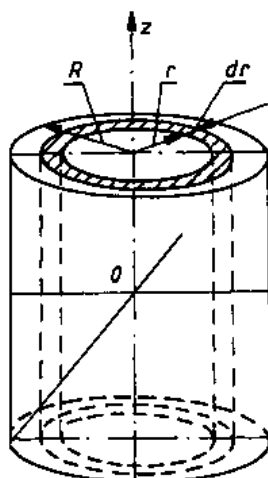
$$I_{xz} = \int_m xz dm \quad (5)$$

Momenty odśrodkowe (w odróżnieniu od zwykłych momentów bezwładności) mogą przyjmować wartości zarówno dodatnie, jak i ujemne. Można więc zauważyć, że jeśli ciało ma płaszczyznę symetrii, to moment odśrodkowy względem tej płaszczyzny i płaszczyzny do niej prostopadłej jest równy zero.

Jeśli momenty odśrodkowe dowolnego ciała względem trzech par płaszczyzn układu współrzędnych są równe zero, to osie współrzędnych są głównymi osiami bezwładności tego ciała. Jeżeli początek tych osi znajduje się w środku masy ciała, to osie te nazywają się głównymi centralnymi osiami bezwładności.

Jeżeli ciało ma oś symetrii, to oś ta jest jego główną centralną osią bezwładności, jeżeli natomiast ciało ma płaszczyznę symetrii, to każda prosta prostopadła do tej płaszczyzny i

przechodząca przez środek masy jest główną centralną osią bezwładności.



Rys. 2. Wyznaczanie momentu bezwładności walca obrotowego

### Przykład. Jednorodny walec obrotowy

Moment bezwładności walca obrotowego względem jego osi obrotu (oś  $Oz$  na rys. 3) wyprowadzimy bezpośrednio z definicji (2).

W tym celu wycinamy myślowo elementarną warstwę o grubości  $dr$  ograniczoną dwiema powierzchniami walcowymi o promieniu  $r$  i  $r + dr$ .

Ponieważ odległość  $h$  całej warstwy równa się  $r$

$$dV = 2\pi r H dr$$

to moment bezwładności

$$\begin{aligned} I_z &= \int_V \rho h^2 dV = \int_0^R \rho h^2 (2\pi r H dr) = \int_0^R \rho r^3 2\pi H dr = \\ &= 2\pi \rho H \int_0^R r^3 dr = 2\pi \rho H \left( \frac{r^4}{4} \right)_0^R = \frac{\pi \rho H R^4}{2} \end{aligned}$$

Uwzględniając, że masa walca wynosi  $m = \pi R^2 H \rho$ , otrzymujemy:

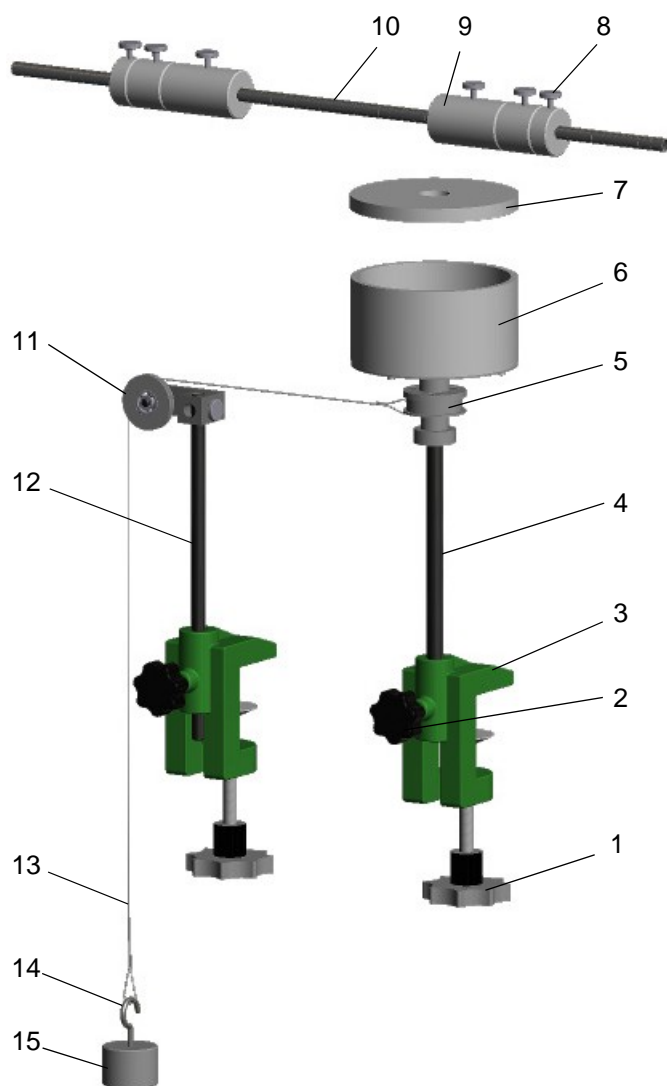
$$I_z = \frac{m R^2}{2}$$

Następnym, ważnym pojęciem z geometrii mas jest środek ciężkości bryły.

**Środkiem ciężkości bryły sztywnej** nazywamy taki punkt  $C$ , który ma tę własność, że stale przechodzi przez niego wypadkowa układu sił ciężkości działających na układ punktów materialnych tworzących daną bryłę.

### 9.3. OPIS STANOWISKA POMIAROWEGO

Ciężarki (9) mogą być zamocowane do poziomego pręta (10) w oznaczonych odległościach względem środka. W efekcie można uzyskać układ, którego bezwładność względem osi pionowej może być zmieniona. Pręt poziomy (10), walec pełny (7) lub wydrążony (6) przymocowane są do ułożyskowanego bębna (5). Oznaczenia na pręcie pozwalają na dokładne rozmieszczenie ciężarków. Układ może uzyskać przyspieszenie kątowe w ruchu obrotowym względem pionowej osi dzięki ciężarkowi (15) na nylonowej linie (13) nawijanej na bębnie. W ćwiczeniu wykorzystuje się stoper do pomiaru czasu, w którym ciężarek opada.



Część	Opis
1	Śruby mocujące uchwyty do stołu
2	Śruba mocująca oś pionową
3	Uchwyt stołowy
4	Pionowa oś obrotu
5	Bębenek
6	Wydrążony walec
7	Pełny walec
8	Śruba mocująca
9	Ciężarek
10	Poziomy pręt
11	Rolka prowadząca
12	Pionowa oś prowadząca
13	Nylonowa linka
14	Uchwyt ciężarka
15	Ciężarek 1 N

Rys. 3. Stanowisko pomiarowe TM 610

Urządzenie powinno być umocowane na poziomym stole w ten sposób, aby uchwyty mocujące były w odległości 20 cm od siebie.

#### 9.4. ZASADA POMIARU

Zasady przedstawione poniżej opierają się na teorii, która szczegółowo opisana jest w literaturze podanej na końcu instrukcji.

- 1) Ciężarek oddziałujący poprzez linkę na bębenek, wprawia układ w jednostajnie przyspieszony ruch obrotowy wokół osi pionowej.
- 2) Za pomocą stopera mierzony jest czas  $t$ , w jakim ciężarek pokona drogę równą wysokości  $h$ .
- 3) Korzystając ze zmierzonego czasu  $t$  i drogi  $h$ , wzdłuż której ciężarek przyspieszał, można obliczyć moment bezwładności  $I$ , na podstawie drugiego prawa Newtona w ruchu obrotowym:

$$M = I\varepsilon$$

$M$  – moment sił zewnętrznych [Nm],  $I$  – moment bezwładności [ $\text{kgm}^2$ ],  $\varepsilon$  – przyspieszenie kątowe [ $\text{rad/s}^2$ ].

$$I\varepsilon = mgr$$

$m$  – masa ciężarka [kg],  $g$  – przyspieszenie ziemskie [ $\text{m/s}^2$ ],  $r$  – promień bębena [m].

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2} \Rightarrow \varepsilon = \frac{2\varphi}{t^2}; \quad \varphi = \frac{h}{r}$$

$\varphi$  – droga kątowa [rad],  $h$  – droga pokonana przez ciężarek [m].

Podstawiając powyższe otrzymujemy:

$$I \frac{2h}{rt^2} = mgr$$

Wzór końcowy, który pokazuje w jaki sposób obliczyć moment bezwładności na podstawie pomiaru czasu w jakim odbywa się przyspieszanie układu:

$$I = \left( \frac{mgr^2}{2h} \right) \cdot t^2$$

## 9.5. PRZEBIEG ĆWICZENIA

### 9.5.1. Pomiar 1: Moment bezwładności układu pomiarowego

Celem pomiaru jest wyznaczenie własnego momentu bezwładności układu pomiarowego w podstawowej konfiguracji tj. poziomego pręta osadzonego na osi pionowej wraz z bębniem do nawijania linki. Wyznaczony w tej części moment bezwładności będzie wykorzystany do skorygowania wyników pomiarów w kolejnych eksperymentach.

**Należy wykonać następujące czynności:**

- 1) Ustawić centralnie pręt poziomy z podziałką,
- 2) Zabezpieczyć pręt przed wysunięciem dokręcając śruby,
- 3) Obracać poziomym prętem w celu nawinięcia linki na bębenek do chwili, gdy ciężarek znajdzie się w najwyższym położeniu,
- 4) Rozpocząć pomiar czasu w chwili, gdy układ zostaje zwolniony (ciężarek opada),
- 5) Zakończyć pomiar czasu w chwili, gdy ciężarek znajdzie się w najniższym położeniu,
- 6) Ciężarek zostanie ponownie wciągnięty do góry w wyniku bezwładności obracającego się układu,
- 7) Powtórzyć pomiar trzy razy, wyznaczyć średni czas, wykorzystać tę wartość średnią do obliczenia momentu bezwładności  $I_0$ ,
- 8) Wyznaczona wartość  $I_0$  pozwoli na skorygowanie kolejnych pomiarów:

$$I_{kor} = I_{eks} - I_0$$

$I_{kor}$  = skorygowany moment bezwładności,

$I_{eks}$  = moment bezwładności wyznaczony eksperymentalnie,

$I_0$  = moment bezwładności układu poziomego pręta z ciężarkami i bębna.

### 9.5.2. Pomiar 2: Moment bezwładności w zależności od masy

Celem pomiaru jest wyznaczenie momentu bezwładności przy różnych wartościach mas ciężarków zamocowanych w tej samej odległości względem środka pręta.

**Należy wykonać następujące czynności:**

- 1) Umieścić na obydwu końcach pręta ciężarki o masie 100 g każdy. Odległość pomiędzy środkiem masy ciężarka a osią obrotu powinna wynosić w każdym przypadku 0,245 m,
- 2) Zabezpieczyć ciężarki śrubami,
- 3) Obracać poziomym prętem w celu nawinięcia linki na bębenek do chwili, gdy ciężarek znajdzie się w najwyższym położeniu,
- 4) Rozpocząć pomiar czasu w chwili, gdy układ zostaje zwolniony (ciężarek opada),
- 5) Zakończyć pomiar czasu w chwili, gdy ciężarek znajdzie się w najniższym położeniu,
- 6) Ciężarek zostanie ponownie wciągnięty do góry w wyniku bezwładności obracającego się układu,
- 7) Powtórzyć pomiar trzy razy, wyznaczyć średni czas, wykorzystać tę wartość średnią do obliczenia momentu bezwładności,
- 8) Powtórzyć kroki od 1) do 7) wykorzystując ciężarki o masach 200 g i 400 g.
- 9) Wyniki zamieścić w tabeli, uwzględniając wartość skorygowaną momentu bezwładności.
- 10) Narysować wykres w następującym układzie odniesienia: na osi pionowej – wartość

momentu bezwładności  $I_{kor}$  [ $\text{kgm}^2$ ]; na osi poziomej – masa ciężarka  $m$  [g].

### 9.5.3. Pomiar 3: Moment bezwładności w zależności od promienia

Celem pomiaru jest wyznaczenie zależności pomiędzy wartością momentu bezwładności a rozmieszczeniem masy w kierunku promieniowym (odległością od osi obrotu).

**Należy wykonać następujące czynności:**

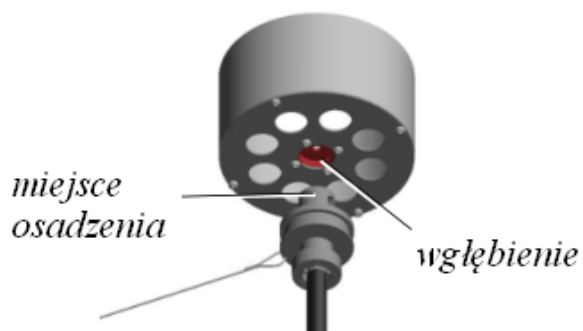
- 1) Umieścić na obydwu końcach pręta ciężarki o masie 400 g każdy. Odległość pomiędzy środkiem masy ciężarka a osią obrotu powinna wynosić 0,055 m,
- 2) Zabezpieczyć ciężarki śrubami,
- 3) Obracać poziomym prętem w celu nawinięcia linki na bębenek do chwili, gdy ciężarek znajdzie się w najwyższym położeniu,
- 4) Rozpocząć pomiar czasu w chwili, gdy układ zostaje zwolniony (ciężarek opada),
- 5) Zakończyć pomiar czasu w chwili, gdy ciężarek znajdzie się w najniższym położeniu,
- 6) Ciężarek zostanie ponownie wciągnięty do góry w wyniku bezwładności obracającego się układu,
- 7) Powtórzyć pomiar trzy razy, wyznaczyć średni czas, wykorzystać tę wartość średnią do obliczenia momentu bezwładności,
- 8) Powtórzyć kroki od 1) do 7) wykorzystując w każdym przypadku ciężarki o masie 400 g. Zmieniać odległości ciężarków od osi obrotu, kolejno: 0,095 m; 0,155 m; 0,245 m.
- 9) Wyniki zamieścić w tabelach, uwzględniając wartość skorygowaną momentu bezwładności.
- 10) Narysować wykres w następującym układzie odniesienia: na osi pionowej – wartość momentu bezwładności  $I_{kor}$  [ $\text{kgm}^2$ ]; na osi poziomej – odległość ciężarka od osi obrotu w kierunku promieniowym [m].

### 9.5.4. Pomiar 4: Porównanie momentów bezwładności dla walca pełnego i wydrążonego

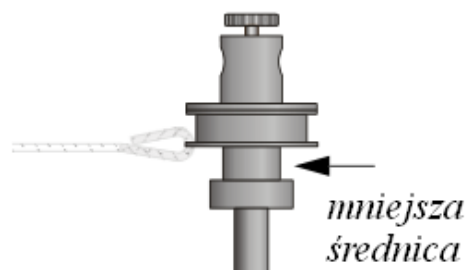
Celem pomiaru jest porównanie momentów bezwładności dwóch walców o tych samych masach i tych samych promieniach, ale o różnych kształtach.



Rys. 4. Instalacja pełnego i wydrążonego walca



Rys. 5. Widok z kierunku Z



Rys. 6. Bieżnia bębna o mniejszej średnicy

**Należy wykonać następujące czynności:**

- 1) Zamocować wydrążony walec na osi pionowej zgodnie z rysunkami 5 i 6.
- 2) Zabezpieczyć walec dokręcając śrubę,
- 3) Obracać walcem w celu nawinięcia linki na bębenek do chwili, gdy ciężarek znajdzie się w najwyższym położeniu, **uwaga:** *nawijać linkę na bieżni bębna o mniejszej średnicy, jak na rysunku 7,*
- 4) Rozpocząć pomiar czasu w chwili, gdy układ zostaje zwolniony (ciężarek opada),
- 5) Zakończyć pomiar czasu w chwili, gdy ciężarek znajdzie się w najniższym położeniu,
- 6) Powtórzyć pomiar trzy razy, wyznaczyć średni czas, wykorzystać tę wartość średnią do obliczenia momentu bezwładności wydrążonego walca,
- 7) Zakładając, że moment bezwładności bębna jest pomijalnie mały, korygowanie wartości momentu bezwładności walca nie jest konieczne,
- 8) Powtórzyć kroki od 3) do 7) wykorzystując pełny walec.

## 9.6. ZAWARTOŚĆ SPRAWOZDANIA

- 1) Strona tytułowa wg ustalonego wzorca.
- 2) Wypełniony i podpisany protokół pomiarowy (rozdział 9.7.2).
- 3) Krótkie wprowadzenie do tematu ćwiczenia.
- 4) Tok obliczeń uwzględniający skorygowane wartości momentów bezwładności.
- 5) Wyniki obliczeń zamieszczone w odpowiednich tabelach oraz wykresy wartości momentów bezwładności w zależności od masy i promienia.
- 6) Porównanie wartości momentów bezwładności wyznaczonych eksperymentalnie i teoretycznie (obliczenia na podstawie wzorów na momenty bezwładności brył).
- 7) Wnioski powinny być wyprowadzone na podstawie wyników obliczeń otrzymanych przy użyciu wartości z pomiarów wykonanych podczas ćwiczenia oraz mieć odniesienie do postaw teorii momentów bezwładności brył sztywnych.



## 9.7. ZAŁĄCZNIKI

### 9.7.1. Dane techniczne stanowiska

<i>Wymiary (stanowisko gotowe do pracy)</i>	
długość x szerokość x wysokość	550 mm x 550 mm x 1000 mm
waga	9 kg
<i>Bębenek</i>	
promień	$r_1 = 20 \text{ mm}$ $r_2 = 10 \text{ mm}$
<i>Poziomy pręt</i>	
długość	550 mm
średnica	10 mm
<i>Masa ciężarków (wraz z masą śruby zabezpieczającej)</i>	2 x 100 g 2 x 200 g 2 x 400 g
<i>Walec pełny</i>	
średnica	120 mm
waga	900 g
<i>Walec wydrążony</i>	
średnica zewnętrzna	120 mm
średnica wewnętrzna	110 mm
waga	900 g
<i>Obciążenie linki</i>	1 N



### 9.7.2. Protokół pomiarowy do ćwiczenia nr 9

Protokół pomiarowy znajduje się na następnej stronie.

Laboratorium Mechaniki Technicznej

**ĆWICZENIE 9. BADANIE RUCHU OBROTOWEGO**

Lp	Nazwisko i imię	Grupa	Nr zespołu	Data
1				
2				
3				
4		<i>Podpis osoby prowadzącej ćwiczenie</i>		
5				
6				

Tab. 1. Pomiar 1: Moment bezwładności układu pomiarowego

Czas $t$ [s]			Średni czas $t_m$ [s]

Tab. 2. Pomiar 2: Moment bezwładności w zależności od masy

Masa ciężarka [g]	Czas $t$ [s]			Średni czas $t_m$ [s]

Tab. 3. Pomiar 3: Moment bezwładności w zależności od promienia

Promień $R$ [m]	Czas $t$ [s]			Średni czas $t_m$ [s]

Tab. 4. Pomiar 4: Porównanie momentów bezwładności dla walca pełnego i wydrążonego

Bryła	Czas $t$ [s]			Średni czas $t_m$ [s]
Walec wydrążony				
Walec pełny				

## **9.8. LITERATURA**

- [1] Leyko J.: Mechanika ogólna. PWN, Warszawa 1969.
- [2] Osiński Z: Mechanika ogólna. WPW, Warszawa 1977.
- [3] Rubinowicz W., Królikowski W.: Mechanika teoretyczna. PWN, Warszawa 1977.