

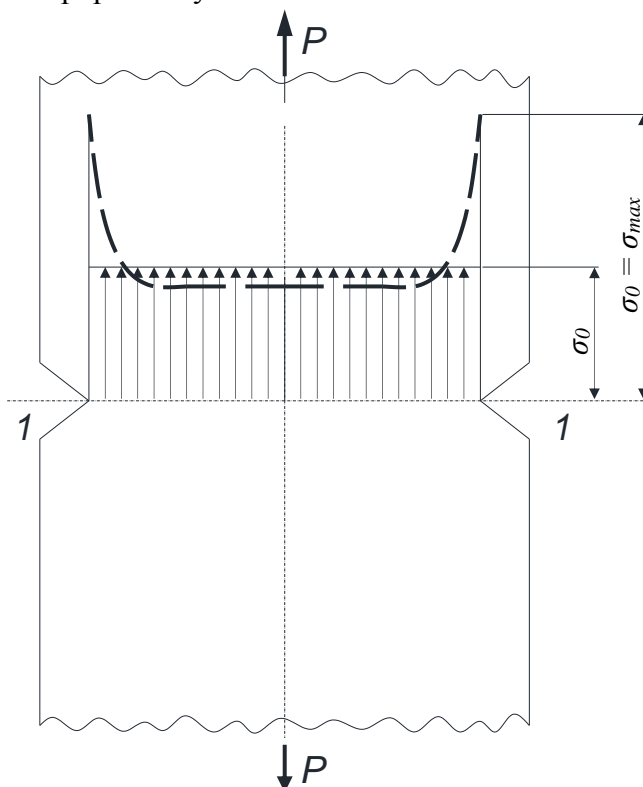
BADANIE ROZKŁADU NAPRĘŻEŃ W TARCZY PROSTOKĄTNEJ Z KARBEM PRZY POMOCY METODY MES

1.1 Wstęp

Celem ćwiczenia jest porównanie rozkładów naprężeń uzyskanych na podstawie wzorów elementarnych z rozkładami uzyskanymi w wyniku pomiarów w przekrojach cienkich tarcz z osłabionymi przekrojami. Efektem przeprowadzonych pomiarów będzie m.in. wyznaczenie przybliżonych wartości współczynników spiętrzenia naprężeń w tych przekrojach.

1.2 Wprowadzenie teoretyczne

Poznane na kursie wytrzymałości materiałów metody wyznaczania rozkładu naprężeń i odkształceń dotyczyły przekrojów brył i obszarów dostatecznie odległych od miejsc przyłożenia obciążenia w postaci sił skupionych, jak również dostatecznie odległych od miejsc nagłych zmian kształtu brył, np. raptownych zmian przekroju, otworów podcięć itp. Były więc analizowane przypadki, dla których obowiązywał niezaburzony rozkład naprężeń zgodnie z zasadą de Saint-Venanta [1]. W celu przypomnienia zilustrujemy to stwierdzenie przykładem (rys. 1.1) pręta obciążonego osiowo siłą P . Wszelkie zmiany przekroju pręta powodują lokalny wzrost naprężeń (spiętrzenie), tym gwałtowniejszy, im bardziej raptowna jest zmiana jego wymiarów poprzecznych.



Rys.1.1 Przykład działania karbu w rozciągającym pręcie z naciętym rowkiem. Linia kreskowa oznacza rozkład naprężeń w przekroju 1-1 z uwzględnionym działaniem karbu

Na rysunku 1.1 uwidoczniono spiętrzenie naprężeń na dnie rowka naciętego na pręcie, pokazując jednocześnie rozkład naprężeń bez uwzględnienia działania karbu (linia ciągła). Takie naprężenia obliczone teoretycznie w przekroju 1-1 za pomocą wzoru 1.1, nazywać będziemy naprężeniami normalnymi:

$$\sigma_0 = \frac{P}{F} \quad (1.1)$$

gdzie F – pole przekroju 1-1 pręta.

Takie fragmenty ciał (elementów maszyn), jak skoki przekroju, otwory itp. oraz miejsca działania sił skupionych wywołują lokalny wzrost naprężeń i są nazywane *karbami*. Maksymalne naprężenia spowodowane istnieniem karbu są kilkakrotnie większe niż tzw. naprężenia nominalne (obliczone w danym przekroju, tak jak gdyby karbu nie było).

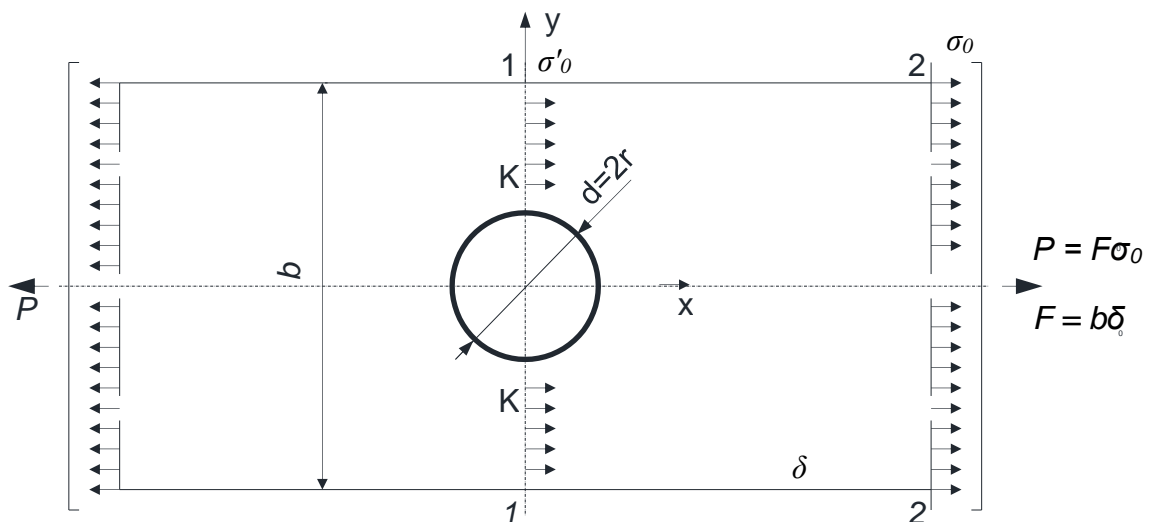
Rozpatrzmy drugą tarczę (płaskownik) o szerokości b , grubości δ , w której wywiercono pośrodku mały otwór o średnicy d (rys.1.2). Tarczę poddano osiowemu rozciąganiu siłą P . Pod działaniem siły P w przekroju 2-2, dostatecznie odległym od miejsca zaczepienia siły i od otworu, naprężenia nominalne rozciągające są rozłożone równomiernie, a ich wartość wynosi:

$$\sigma_0 = \frac{P}{b\delta} \quad (1.2)$$

Jest to jednowymiarowy stan naprężeń. Analogicznie wg teorii elementarnej można obliczyć naprężenie nominalne w przekroju osłabionym otworem:

$$\sigma'_0 = \frac{P}{\delta(b-d)} \quad (1.3)$$

Widać, że $\sigma'_0 > \sigma_0$.



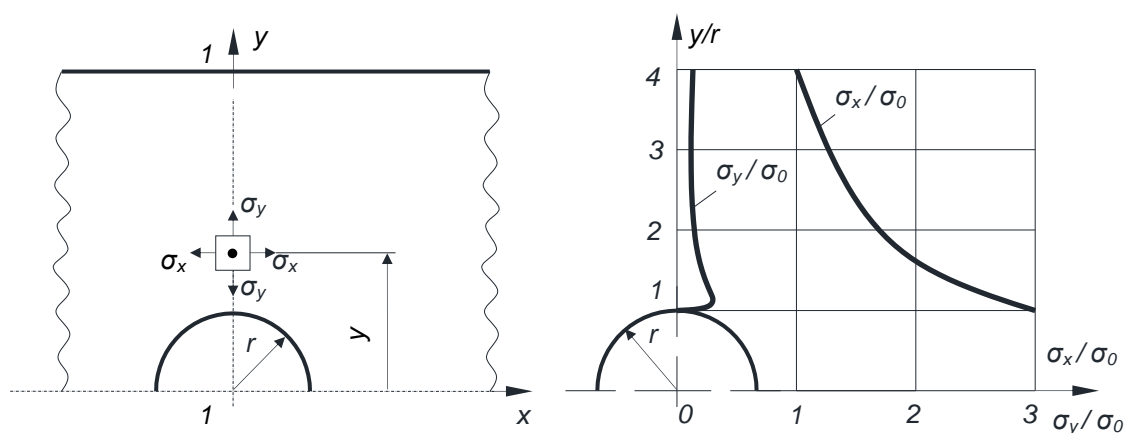
Rys. 1.2 Naprężenia nominalne w płaskiej tarczy osłabionej otworem w przekroju 1-1 i w przekroju pełnym 2-2

Takie podejście do obliczenia rozkładu naprężeń w przekroju 1-1 jest „nieczułe” na istnienie karbu, tzn. nie uwzględnia go. Jednak jak dowodzi doświadczenie i dokładniejsza analiza stosowana w teorii sprężystości, rozkład naprężeń w przekroju 1-1 jest *nierównomierny* i *nieliniowy* oraz *dwuwymiarowy*. Powodem tego stanu jest fakt, że włókna podłużne tarczy przecięte otworem nie mogą przenosić sił wzdłużnych tuż przy granicy otworu i siły te są „przejmowane” przez najbliższe włókna nie przecięte otworem. Dla przekroju 1-1, najbardziej osłabionego otworem, pokazano na rys. 1.3 rozkład naprężeń w kierunku działania siły P w postaci $\frac{\sigma_x(y)}{\sigma_0}$ oraz rozkład naprężeń w kierunku prostopadłym do siły P w postaci $\frac{\sigma_y(y)}{\sigma_0}$.

Podany na rys. 1.3 rozkład naprężeń jest opisany w teorii sprężystości zależnościami[1]:

$$\sigma_x(y) = \sigma_0 \left[1 + \left(\frac{r^2}{2y^2} \right) + \left(\frac{3r^4}{2y^4} \right) \right] \quad (1.4)$$

$$\sigma_y(y) = \frac{3}{2} \sigma_0 \left[\left(\frac{r^2}{y} \right) - \left(\frac{r}{y} \right)^4 \right]$$



Rys. 1.3 Rozkład naprężeń w przekroju 1-1 tarczy poddanej rozciąganiu

Zauważmy, że przy zbliżaniu się do brzegu swobodnego ($y \rightarrow \pm \frac{b}{2}$) i przy założeniu, że $r \ll b$, będzie:

$$\sigma_x(y) \rightarrow \sigma_0$$

$$\sigma_y(y) \rightarrow 0$$

Przy zbliżaniu się do krawędzi otworu ($y \rightarrow \pm r$):

$$\begin{aligned}\sigma_x(y) &\rightarrow 3\sigma_0 \\ \sigma_y(y) &\rightarrow 0\end{aligned}$$

W punktach K naprężenia wynoszą ($y = \pm r$):

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 3\sigma_0 \\ \sigma_y &= 0\end{aligned}$$

Taki lokalny wzrost wartości naprężeń $\sigma_x(y)$ nazywamy *spiętrzeniem* lub *koncentracją* naprężeń. Zjawisko spiętrzenia naprężeń występuje w sytuacjach praktycznych, tam gdzie mamy do czynienia z karbem. Dokładniej omówiono to zagadnienie w podręcznikach wytrzymałości materiałów [1, 2]. W obliczeniach stosuje się tzw. współczynnik spiętrzenia naprężeń (współczynnik kształtu), który można zdefiniować następująco:

$$\alpha_k \rightarrow \frac{(\sigma_x)_{\max}}{\sigma_0} \quad (1.5)$$

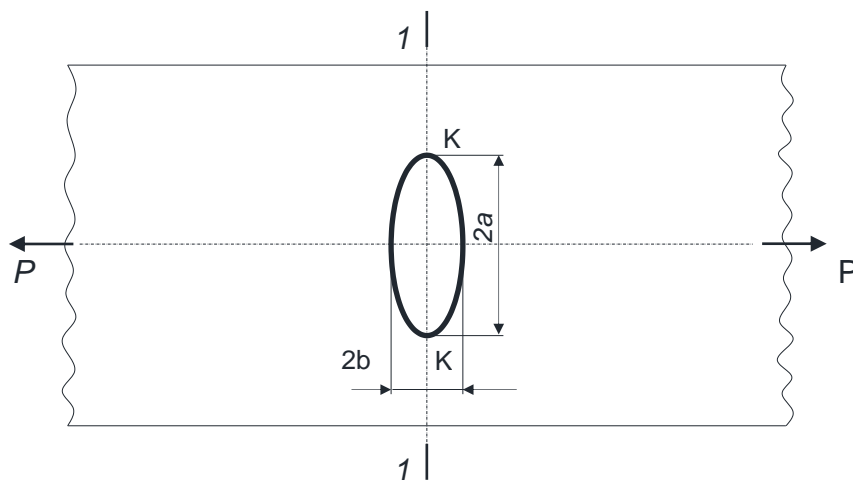
lub

$$\alpha_k' \rightarrow \frac{(\sigma_x)_{\max}}{\sigma_0'} \quad (1.6)$$

Wartość nominalną naprężeń można obliczać w konkretnym przypadku wg. wzorów stosowanych w klasycznej wytrzymałości materiałów, np. σ_0 lub σ_0' - dla rozważanej tarczy. Zatem pojęcie *współczynnika spiętrzenia naprężeń* może być definiowane w tym przypadku na dwa sposoby. Jeśli zamiast otworu kołowego w tarczy z rys 1.2 rozważymy otwór eliptyczny wykonany pośrodku tarczy (rys. 1.4), to współczynnik spiętrzenia naprężeń α_k w pobliżu punktów K wyrazi się wzorem [3]

$$\alpha_k = 1 + \frac{2a}{b} \quad (1.7)$$

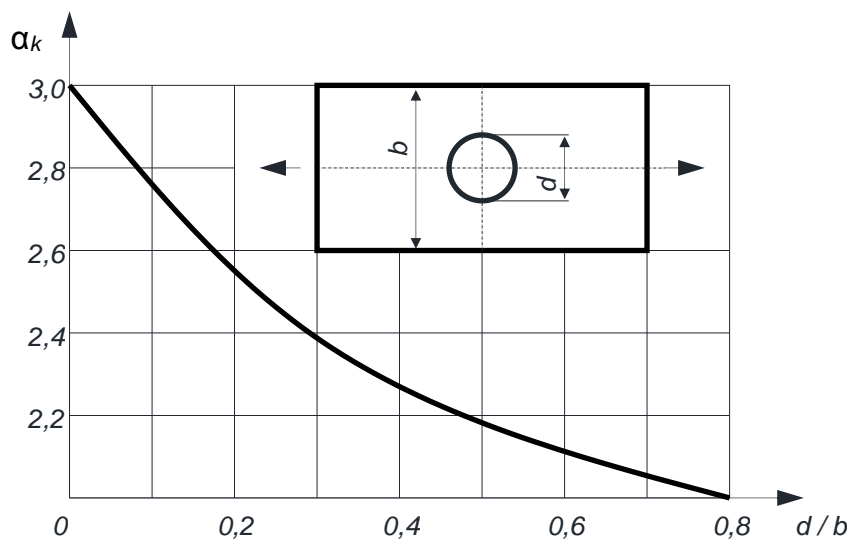
gdzie a, b – półosie elipsy.



Rys. 1.4 Tarcza z otworem eliptycznym

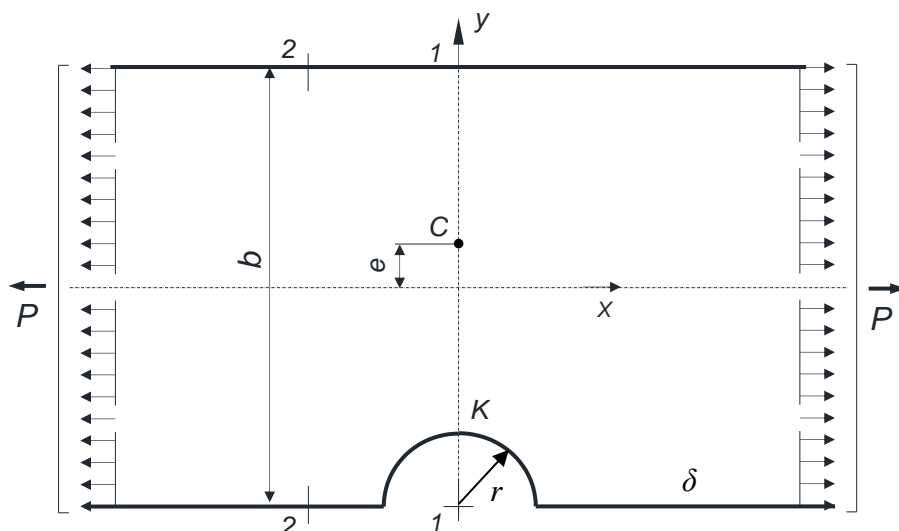
Dla $a = b$ otrzymujemy taki sam rezultat jak dla otworu kołowego, tzn. $\sigma_x = 3\sigma_0$, $\alpha_k = 3$. Jeżeli poprzeczna oś otworu $2a$ jest duża w porównaniu z osią $2b$, to współczynnik koncentracji naprężeń silnie wzrośnie w porównaniu ze współczynnikiem dla otworu kołowego.

Wykres pokazany na rys. 1.5 obrazuje, w jaki sposób średnica otworu d (stosunek d/b) wpływa na zmianę współczynnika spiętrzenia naprężeń α_k , gdy tarcza jest poddawana prostemu rozciąganiu.



Rys. 1.5 Wpływ stosunku $\frac{d}{b}$ na zmiany współczynnika koncentracji naprężeń α_k

Rozważmy obecnie inną tarczę osłabioną wycięciem o promieniu r (rys. 1.6). Środek C najbardziej osłabionego przekroju tarczy jest przesunięty względem przekroju pełnego o wielkość e , jak to zaznaczono na rysunku. Wyznaczenie rozkładu naprężeń w przekrojach 2-2, dostatecznie oddalonych od obciążonego brzegu tarczy i od wycięcia nie różni się od zadania dla tarczy poprzecznej. W przekroju 1-1 natomiast rozkład naprężeń nominalnych σ_0' będzie nierównomierny. Jeśli bowiem przetniemy myślowo tarczę w miejscu 1-1, to wysiłek przekroju będzie stanowił siłę P i moment zginający



Rys. 1.6 Tarcza z niesymetrycznym wycięciem w postaci półkola o promieniu r

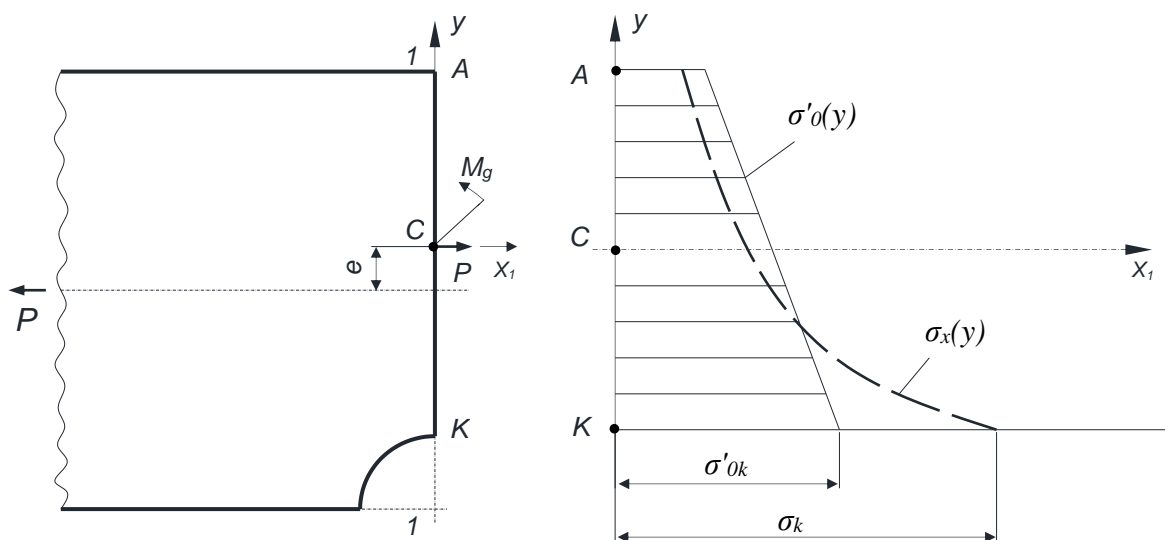
$M_g = Pe$, zapewniające stan równowagi jednej części tarczy. Stan taki został pokazany na rys. 1.7.

Naprężenia nominalne w dowolnym punkcie przekroju 1-1 na odcinku A-K będą superpozycją naprężeń spowodowanych rozciąganiem σ_r oraz naprężeń spowodowanych zginaniem σ_g , czyli

$$\sigma'_0 = \sigma_r + \sigma_g = \frac{P}{\delta(b-r)} + \frac{-12Pe}{\delta(b-r)^3} y \quad (1.8)$$

Na rysunku 1.7 rozkład naprężeń nominalnych $\sigma'_0(y)$ oznaczono linią ciągłą, a pomiarowych $\sigma_x(y)$ - kreskową.

We wzorze (1.8) wyrażenie $J_z = \frac{\delta(b-r)^3}{12}$ jest momentem bezwładności przekroju względem osi obojętnej przechodzącej przez początek układu Cx_1y . Wzór (1.8) został zapisany w układzie Cx_1y .



Rys. 1.7 Rozkład naprężeń w kierunku osi x_1 , wyznaczonych za pomocą wzoru (1.8) i na podstawie pomiarów

Zauważmy, że w zależności od wartości mimośrodu e mogą się pojawić na pewnej części odcinka A-K naprężenia ściskające, tzn. $\sigma'_0 < 0$.

W dalszym ciągu, podobnie jak w przypadku tarczy z otworem, będzie nas interesować wyznaczanie rozkładu naprężeń w kierunku działania siły rozciągającej P , a zwłaszcza wartości tych naprężeń w pobliżu punktów K.

Współczynnik spiętrzenia naprężeń zdefiniujemy dla tego przykładu w postaci (patrz rys. 1.7):

$$\alpha'_k = \frac{\sigma_k}{\sigma'_{0k}} \quad (1.9)$$

Wartość σ_k wyznaczamy na podstawie pomiarów tensometrycznych w pobliżu punktu K; natomiast σ'_{0k} obliczamy za pomocą wzoru (1.8) podstawiając wartość współrzędnej y w punkcie K.

Na wartość współczynnika α'_k mają również wpływ wymiary tarczy, takie jak promień wycięcia, szerokość tarczy oraz głębokość wycięcia.

Mając na uwadze różnorodność kształtów geometrycznych elementów maszyn możemy stwierdzić, iż na drodze teoretycznej jest bardzo trudno wyznaczyć współczynnik spiętrzenia naprężeń. Tylko w nielicznych przypadkach można uzyskać rozwiązania analityczne rozkładu naprężeń z uwzględnieniem zjawiska karbu (np. tarcza z otworem). Pomimo możliwości, jakie daje w wielu zagadnieniach metoda elementów skończonych, w dalszym ciągu wykorzystujemy eksperymentalne metody pomiaru rozkładu naprężeń i wyznaczania ich maksymalnych wartości.

Należy podkreślić, że spiętrzenie naprężeń jest szczególnie groźne przy obciążeniach dynamicznych i o długotrwałym działaniu – mamy wówczas do czynienia z obniżaniem się wytrzymałości elementu, zwanym zmęczeniem materiału.

W toku wielu badań wpływu zjawiska koncentracji naprężeń na zmęczenie materiałów ustalono, że wpływ ten nie daje się wyrazić prostą zależnością tylko od współczynnika α_k , lecz jest funkcją wielu czynników, takich jak stan powierzchni elementu, wrażliwość materiału na działanie karbu, współczynnik wielkości przedmiotu itd. Zagadnienia te zostały opisane szerzej w cytowanych książkach i w innych pracach na temat zmęczenia elementów maszyn.

W tym ćwiczeniu ograniczymy się do wyznaczenia współczynnika spiętrzenia naprężeń α_k lub α'_k (czyli tzw. współczynnika kształtu) przy obciążeniu statycznym prostych tarcz prostokątnych z otworami lub wycięciami.

Tradycyjna metoda pomiaru naprężeń wykorzystuje tensometry oporowe, które spełniają rolę przetworników pomiarowych i wraz ze wzmacniaczem tensometrycznym umożliwiają pomiar odkształcenia względnego, jakiemu ulegają tarcze poddane obciążeniu. Zjawisko tensooporowe polega na tym, że naklejony na badanym elemencie tensometr (jako czujnik) ulega odkształceniu wraz z tym elementem. Odkształcenie tensometru (drucika metalowego lub kilku równoległych drucików) powoduje, że jego opór elektryczny ulega zmianie. Zmiana oporu drutu jest (w granicach prawa Hooke'a) proporcjonalna do zadanego odkształcenia. Ten fakt jest wykorzystywany do pomiaru odkształcenia np. podczas rozciągania lub ściskania prętów lub tarcz. Powyższe stwierdzenie możemy zapisać w postaci związku

$$\frac{\Delta R}{R} = k\varepsilon$$

gdzie:

R - opór elektryczny drutu, z którego wykonany jest tensometr;

ΔR – przyrost oporu spowodowany odkształceniem tensometru (badanego elementu);

k – tzw. stała tensometru (współczynnik czułości tensometru), zależy głównie od materiału, z którego wykonano tensometr; stała k jest podawana przez producenta.

ε – odkształcenie względne tensometru (badanego elementu).

Tak więc, w i-tym punkcie pomiarowym:

$$\varepsilon_{pi} = \left(\frac{\Delta R}{R} \right)_i \frac{1}{k}$$

Odształcenia względne ε_{pi} mierzone w przekroju pomiarowym odpowiadają i-temu tensometrowi odległemu od brzegu tarczy o wielkość d_i . Naprężenie pomiarowe w i-tym punkcie wynosi więc

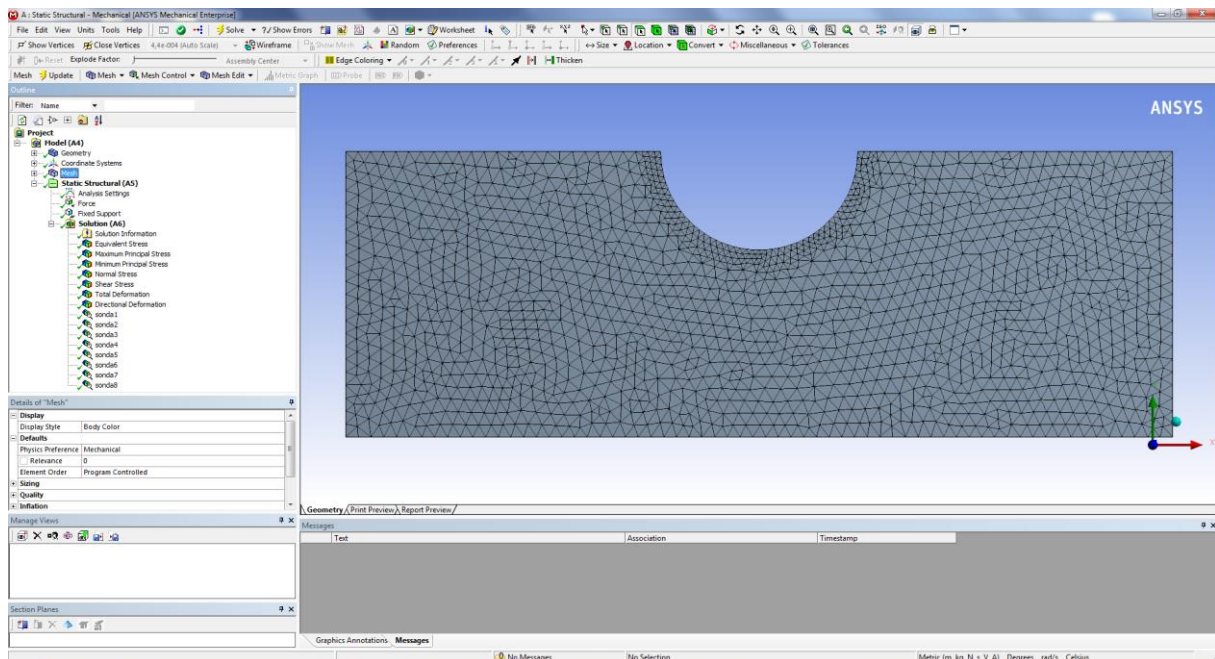
$$\sigma_{xi} = E\varepsilon_{pi}$$

E – moduł Younga dla materiału badanej tarczy.

1.3 Przebieg ćwiczenia

Badaniu zostaną poddane dwie prostokątne tarcze, które będą obciążane siłami rozciągającymi przyłożonymi na dwóch przeciwległych brzegach tarcz; stwarza to możliwość uzyskania równomiernego rozkładu naprężeń $\sigma_x(y)$ w bliskiej odległości od obciążonych brzegów.

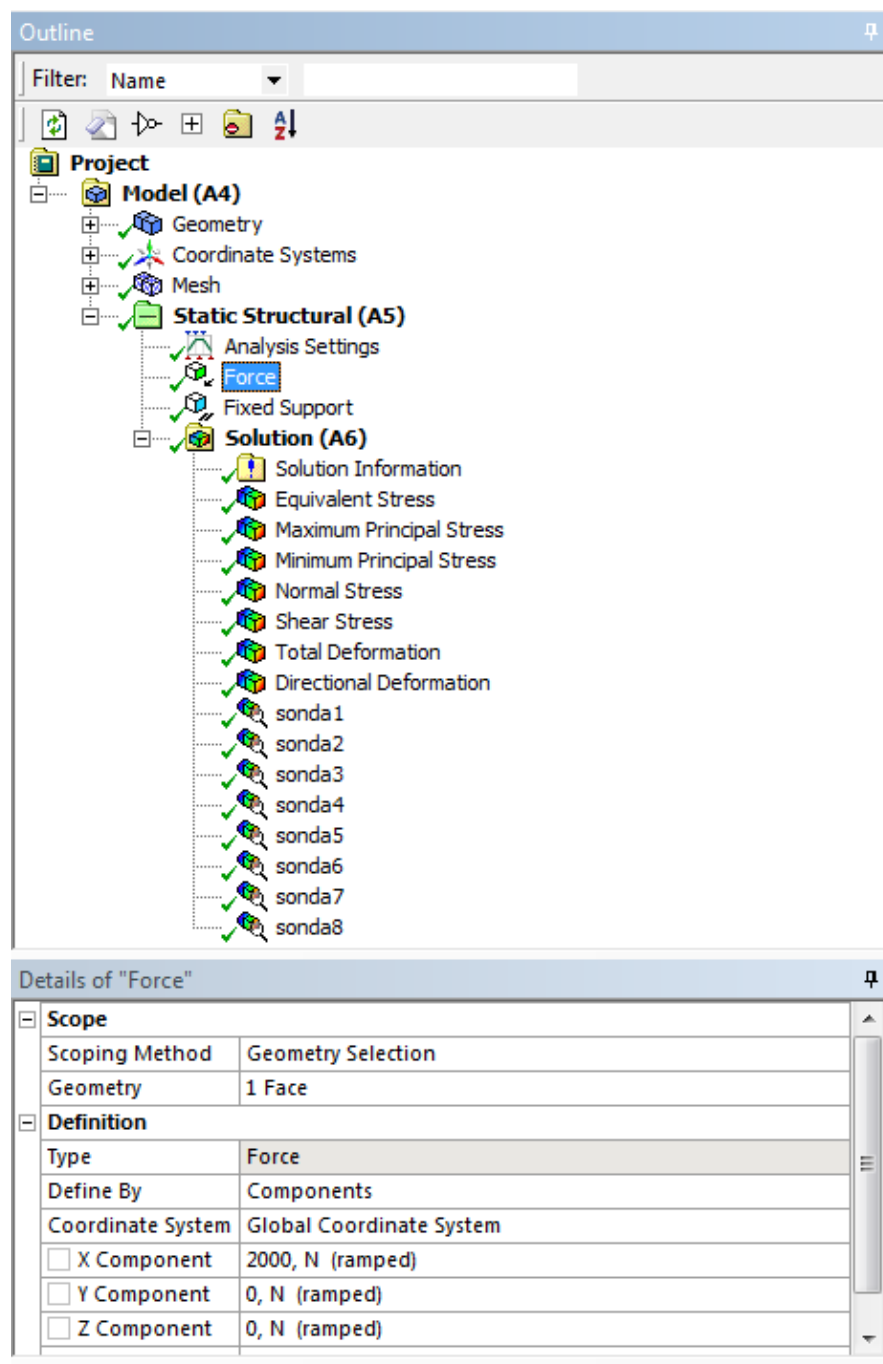
Doświadczenie wykonywane jest przy pomocy modeli przygotowanych w programie komputerowym Ansys, program ten wykorzystuje metodę elementów skończonych do wyznaczenia rozkładu naprężeń.



Rys. 1.8 Główne okno programu Ansys - Mechanical

Kolejne czynności podczas ćwiczenia:

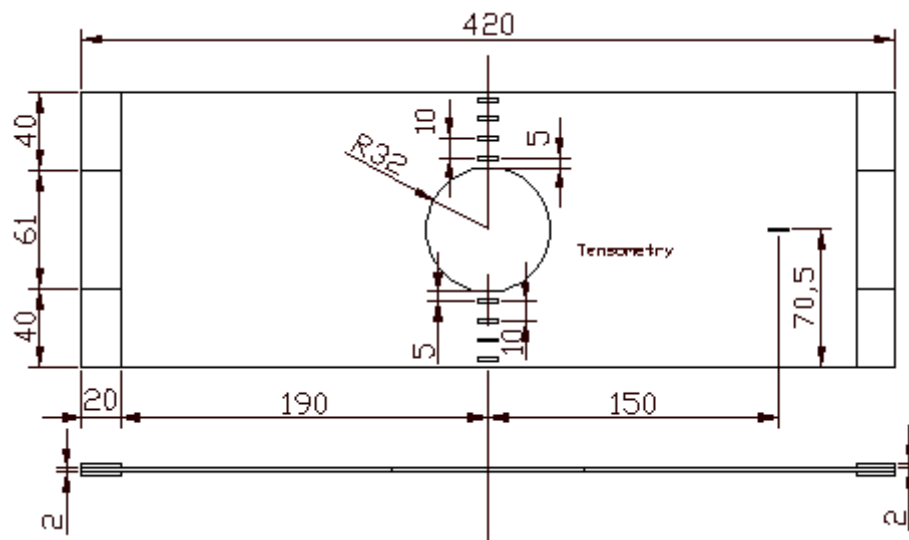
- 1) Włączyć komputer, odnaleźć na pulpicie pliki: karb1 i karb2 (tarcza A i B, rys. 1.10). Kliknąć dwa razy na jednym z plików i poczekać na uruchomienie programu.
- 2) Ustawić wartość siły rozciągającej w panelu sterującym (rys. 1.9) – rozwinąć pozycję **Static Structural** a następnie wybrać pole **Force**. W sąsiadującym okienku wpisać wartość siły działającej w kierunku **X**. Wartości pozostałych składowych Y i Z wynoszą zero.
- 3) Obciążenie zwiększać co ok. 200N, po każdej zmianie obciążenia uruchomić obliczenia poprzez kliknięcie ikony **Solve**.
- 4) Dokonać odczytu naprężeń w wybranych punktach tarczy – rozwinąć pozycję **Solution**, następnie wybrać odpowiednie pole **sonda**. W sąsiadującym okienku odnaleźć pozycję **Normal – X Axis** i odczytać wartość naprężenia. Odczytane wartości naprężeń wpisywać w kolejnych wierszach do końca tabelki.



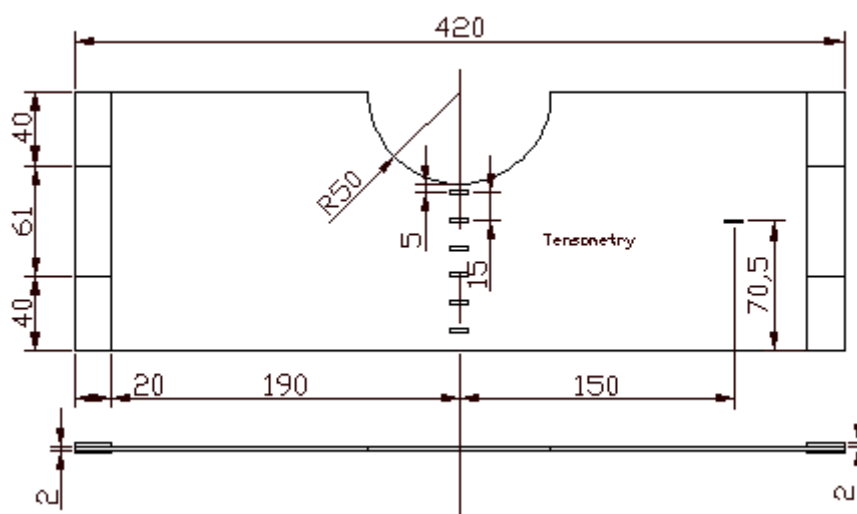
Rys. 1.9 Panel sterujący

Parametry geometryczne potrzebne do obliczeń:

Tarcza A:



Tarcza B:



Rys. 1.10 Wymiary tarcz

Sprawozdanie obejmuje:

- 1) Strona tytułowa.
- 2) Protokół pomiarowy.
- 3) Krótkie przedstawienie celu i zakresu ćwiczenia.
- 4) Obliczenie naprężeń nominalnych σ_0, σ'_0 przy pomocy wzorów 1.3 i 1.8.
- 5) Zestawienie w tabeli wartości naprężeń doświadczalnych i nominalnych.
- 6) Wykonanie wykresów naprężeń doświadczalnych $\sigma_{xi}(y)$.
- 7) Obliczenie wartości współczynnika α_k lub α'_k w otoczeniu punktu K.
- 8) Wnioski.

Wskazówki:

- Wykres przedstawiający rozkład naprężeń doświadczalnych w przekroju osłabionym karbem powinien mieć postać: na osi pionowej wykresu – naprężenie [MPa], na osi poziomej – położenie czujnika względem środka tarczy [mm] (na wykresie muszą być podane jednostki!). Na jednym wykresie należy przedstawić dane dla wszystkich obciążeń.
- Przedstawić przykładowy tok obliczeń, który powinien zawierać: wzór, podstawienie danych w odpowiednich jednostkach i wynik.

Literatura

- [1] Brzoska Z., *Wytrzymałość materiałów*, PWN, Warszawa 1983.
- [2] Niezgodziński M.E., Niezgodziński T., *Wytrzymałość materiałów*, PWN, Warszawa 1984.
- [3] Shigley J.E., Mischke C.R., *Mechanical Engineering Design*, McGraw-Hill Book Company, 1989.
- [4] ESA Messtechnik GmbH, *Instrukcja obsługi systemu akwizycji danych Esam Traveller 1*, 2007.
- [5] Zwick Roell, *Uniwersalna maszyna wytrzymałościowa Zwick Z010. Dokumentacja techniczna*. Zwick/Roel GmbH, Ulm 2005.

Protokół pomiarowy
Laboratorium Mechaniki Technicznej

**ĆW.1A. BADANIE ROZKŁADU NAPRĘŻEŃ W TARCZY PROSTOKĄTNEJ
Z KARBEM PRZY POMOCY METODY MES**

Nazwisko i Imię	Grupa	Zespół	Data/Godzina ćwiczenia
	<i>Podpis prowadzącego ćwiczenie</i>		

Tarcza A

Wymiary tarczy $b = \dots\dots\dots$ $r = \dots\dots\dots$ $\delta = \dots\dots\dots$	Materiał tarczy Moduł Younga $E = \dots\dots\dots$
---	---

Nr kanału	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d_i [mm]										
Wartość siły $P = \dots\dots\dots$ [N]										
σ_{xi}										
Wartość siły $P = \dots\dots\dots$ [N]										
σ_{xi}										
Wartość siły $P = \dots\dots\dots$ [N]										
σ_{xi}										
Wartość siły $P = \dots\dots\dots$ [N]										
σ_{xi}										
Wartość siły $P = \dots\dots\dots$ [N]										
σ_{xi}										
Wartość siły $P = \dots\dots\dots$ [N]										
σ_{xi}										
Wartość siły $P = \dots\dots\dots$ [N]										
σ_{xi}										
Wartość siły $P = \dots\dots\dots$ [N]										
σ_{xi}										

d_i – położenie czujnika względem środka tarczy, σ_{xi} – naprężenie.

Tarcza B

Wymiary tarczy $b = \dots\dots\dots$ $\delta = \dots\dots\dots$	$r = \dots\dots\dots$	Materiał tarczy $\dots\dots\dots$ Moduł Younga $E = \dots\dots\dots$
---	-----------------------	---

[illegible]